Principales Transformadas de Imágenes

Gamaliel Moreno
Maestría en Ciencias del Procesamiento de la Información

UAZ

Ene-Julio, 2019

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier fue propuesta por Joseph Fourier, una matemático francés que nacion en 1768 en Auxerre. Él encontró que una función periódica puede ser expresada como una suma de senos y cosenos de diferentes frecuencias, cada una multiplicada por una coeficiente. Después se extendió el concepto a funciones no periódicas pero cuya área bajo la curva es finita.

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier unidimensional

Transformada directa

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

Transformada inversa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier bidimensional

Transformada directa

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

Transformada inversa

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

Transformada de Fourier

Nuestro interés esta puesto en funciones discretas. La transformada de Fourier de una función discreta univariable, $f(x), x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ esta dado por

Transformada Discreta de Fourier

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2j\pi ux/M} \quad \text{Para } u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

Transformada Discreta de Fourier inversa

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{2j\pi ux/M} \quad \text{Para } x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

Transformada de Fourier

Las componentes de la Transformada de Fourier son cantidad complejas, por lo que es conveniente expresarla en forma polar $F(u) = |F(u)|e^{-j\Phi(u)}$

Espectro o magnitud

$$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I^2}$$

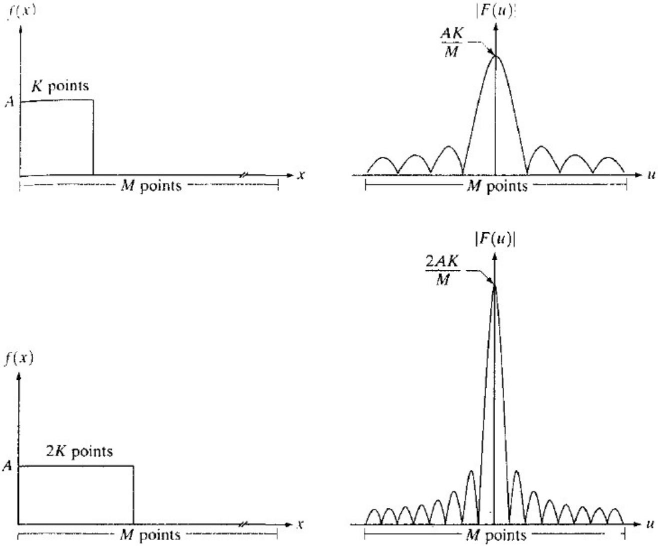
Fase o espectro de la fase

$$\Phi(u) = tan^{-1}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$$

Potencia o densidad espectral

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función discreta (imagen) de tamaño $M \times N$ esta dada por

Transformada de Fourier discreta bidimensional

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

con $u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ y $v = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Transformada de Fourier discreta bidimensional inversa

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

con $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ y $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Transformada de Fourier

Espectro o Magnitud

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

Fase o espectro de fase

$$\Phi(u,v) = tan^{-1}\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

Potencia o densidad espectral

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

Transformada de Fourier

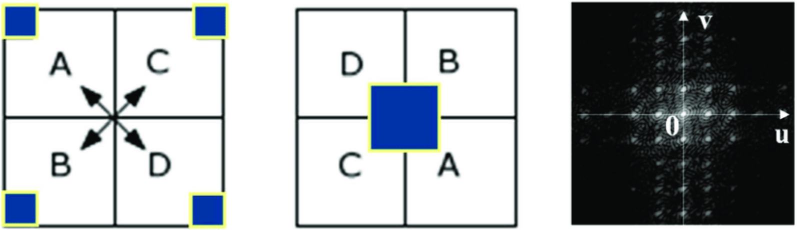
Si f(x,y) es real, entonces la transformada de Fourier tiene simetría hermética, esto es

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

Al igual que el caso unidimensional, se tienen las relaciones entre ele muestreo en el espacio y el dominio de la frecuencia

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y} \tag{1}$$

Espectro centrado



(a) (b) (c)

Transformada de Fourier

El filtrado en el dominio frecuencial consiste de los siguientes pasos

1. Multiplicar la imagen por $(-1)^{x+y}$ para centrar la transformada.
2. Calcular $F(u, v)$, DFT de la image del paso 1.
3. Multiplicar $F(u, v)$ por un filtro $H(u, v)$.
4. Calcular la DFT inversa del resultado del paso 3.
5. Obtener la parte real de la imagen del paso 4.
6. Multiplicar el resultado del paso 5 por $(-1)^{x+y}$.

En todos los casos se asume que la transformada esta centrada.

Notch filter

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u,v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Filtro pasabas ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

En todos los casos se asume que la transformada esta centrada.

Butterworth filter

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + (\sqrt{2}-1)(D(u,v)/D_0)^{2n}} \text{con}\, D(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$$

Gaussian filter

$$H(u,v) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$