Series de Fourier

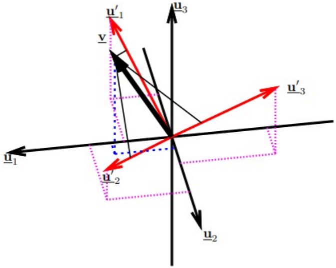
Gamaliel Moreno Chávez
Análisis de Imágenes

UAZ
MCPI

Ago-Dic, 2019

Base canónica

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}'_1 + c_2\mathbf{u}'_2 + c_3\mathbf{u}'_2$$



$$c_i = \frac{\langle \mathbf{u}'_i \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{u}'_i||^2}$$

Serie de Fourier

- Serie compleja
- Serie de cosenos desfasados
- Serie de senos y cosenos

Serie generalizada de Fourier

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{\langle\langle u_k(t), x(t)\rangle\rangle}{||u_k(t)||^2}$$

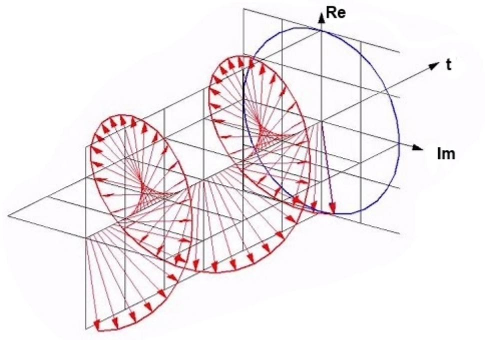
Funciones exponenciales complejas

$$s_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi kF_0 t}$$

donde $k = 0, \pm1, \pm2, ...$, estas funciones tienen como periodo común $T_p = 1/F_0$ y se conocen como exponencial armónicamente relacionadas.

Identidad de Euler

$$e^{jk\omega_0 t} = cos(k\omega_0 t) + jsin(k\omega_0 t) \qquad (1)$$



Funciones armónicamente relacionadas

Vamos a demostrar que las funciones exponencial complejas armónicamente relacionadas son funciones ortogonales por lo que se pueden usar como base para representar funciones periódicas.

$$\begin{aligned}
\langle u_i(t), u_k(t)\rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} u_i(t)^{*} u_k(t)\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\Omega_0 it^{*}} e^{j\Omega_0 kt}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\Omega_0 it} e^{j\Omega_0 kt}\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\Omega_0 (k-i)t}\, dt
\end{aligned}$$

Ortogonalidad de las exponeciales

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\Omega_0(k-i)t}\,dt$$

Para el caso $k = i$ se obtiene

$$\langle u_i(t), u_i(t)\rangle = \int_t^{t_0+T_p} e^{j\Omega_0 0x}\,dt = \int_t^{t_0+T_p} 1\,dt = T_p$$

y para $k \neq i$

$$\langle u_i(t), u_k(t)\rangle = \left.\frac{e^{j\Omega_0(k-i)t}}{j\Omega_0(k-i)}\right|_{t_0}^{t_0+T_p} = \frac{e^{j\Omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j\Omega_0(k-i)T_p} - 1\right)}{j\Omega_0(k-i)}.$$

Ortogonalidad de las exponeciales

y para $k \neq i$

$$\langle u_i(t), u_k(t) \rangle = \left. \frac{e^{j\Omega_0(k-i)t}}{j\Omega_0(k-i)} \right|_{t_0}^{t_0+T_p} = \frac{e^{j\Omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j\Omega_0(k-i)T_p} - 1\right)}{j\Omega_0(k-i)}.$$

Considerando finalmente que $\Omega_0 T_p = 2\pi$ se obtiene

$$\langle u_i(t), u_k(t) \rangle = \frac{e^{j\Omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j2\pi(k-i)} - 1\right)}{j\Omega_0(k-i)} = 0$$

con lo que queda demostrada la ortogonalidad de las funciones $u_k(t) = e^{j\Omega_0 kt}$.

Serie de Fourier

La serie de Fourier nos va a sintetizar funciones periódicas $x(t) = x(t + kT_p)$ con

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 t}$$

y analiza, o extrae cada componente

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 t} x(t) dt$$

Función síntesis

En la mayoría de las aplicaciones se utilizarán funciones $x(t)$ de valor real. Para este caso especial, puesto que $x^* a = (xa)^*$ cuando $x \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$, y $x^* + y^* = (x+y)^*$, entonces se cumple para los coeficientes de la serie con $k \in \mathbb{N}^+$ que

$$
\begin{aligned}
c_{-k} &= \frac{\langle s_{-k}(t), x(t)\rangle}{\|s_{-k}(t)\|^2} = \frac{\langle e^{-j\omega_0 kt}, x(t)\rangle}{\|e^{-j\omega_0 kt}\|^2} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt}\right)^* x(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt} x(t)\right)^* dt = \frac{1}{T_p}\left(\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt\right)^* = {c_k}^*
\end{aligned}
$$

Simetría hermítica

A la relación que puede escribirse como $c^*_{-k} = c_k$ se le conoce como simetría conjugada o simetría hermítica de los coeficientes de Fourier para funciones reales.

Simetría hermítica implica que la magnitud de $c_k y c_{-k}$ son iguales y que el ángulo de c_k es igual al inverso aditivo del ángulo de c_{-k} $(\angle c_k = -\angle c_{-k})$

Función síntesis

En la mayoría de las aplicaciones se utilizarán funciones $x(t)$ de valor real. Para este caso especial, puesto que $x^*a = (xa)^*$ cuando $x \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$, y $x^* + y^* = (x+y)^*$, entonces se cumple para los coeficientes de la serie con $k \in \mathbb{N}^+$ que

$$\begin{aligned}
c_{-k} &= \frac{\langle s_{-k}(t), x(t)\rangle}{\|s_{-k}(t)\|^2} = \frac{\left\langle e^{-j\omega_0 kt}, x(t)\right\rangle}{\|e^{-j\omega_0 kt}\|^2} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt}\right)^* x(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt} x(t)\right)^* dt = \frac{1}{T_p}\left(\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt\right)^* = {c_k}^*
\end{aligned}$$

Componente CD

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{t_0+T_p}^{t_0} x(t)dt$$

Componente CD

Al coeficiente c_0 se le denomina en ingeniería la componente CD de la señal o función x(t)

La ecuación de síntesis queda como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k cos(\omega_0 kt + \theta_k)$$

Otra representación

Otra representación de la serie de Fourier para funciones reales

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos(\omega_0 kt) - j \operatorname{sen}(\omega_0 kt)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos(\omega_0 kt) + j \operatorname{sen}(\omega_0 kt)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{-k}) \operatorname{sen}(\omega_0 kt)$$

y considerando

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_k{}^*) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_k{}^*) \operatorname{sen}(\omega_0 kt)$$

Otra representación

que se puede simplificar

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{c_k\}\cos(\omega_0 kt) - \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Im}\{c_k\}\,\mathrm{sen}(\omega_0 kt) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\mathrm{sen}(\omega_0 kt)
\end{aligned}
$$

con $a_0 = 2c_0$, $a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} = 2|c_k|\cos\theta_k$ y $b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\} = -2|c_k|\,\mathrm{sen}\,\theta_k$, es decir:

$$
c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \ .
$$